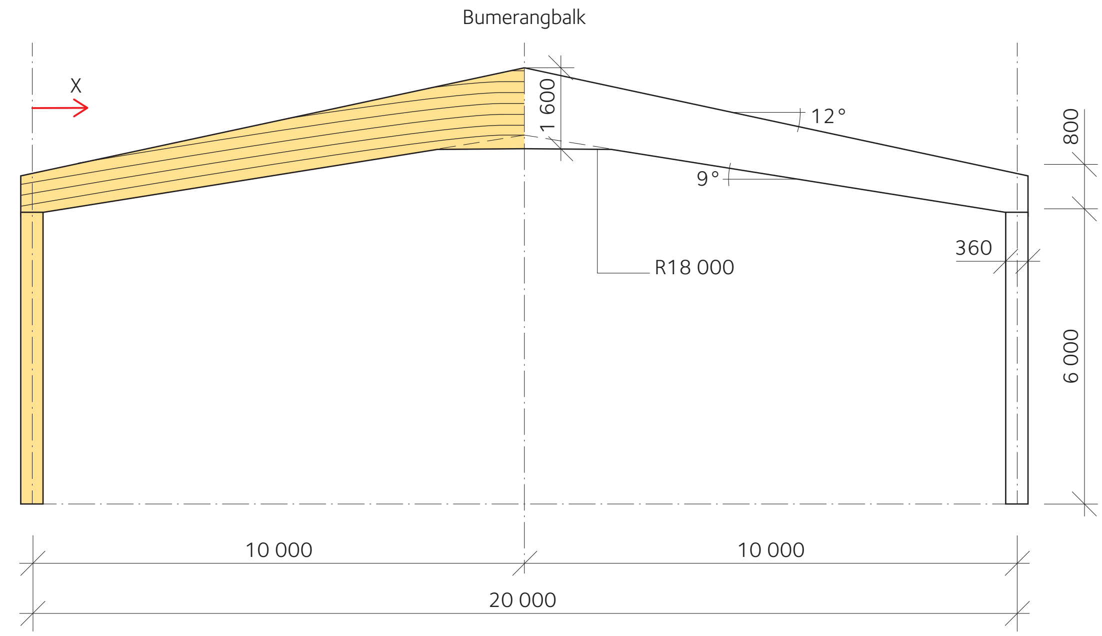
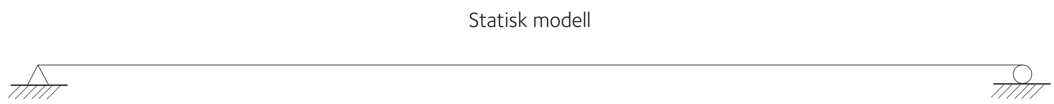
Exempel 3: Bumerangbalk

3.1 Konstruktion, mått och dimensioneringsunderlag

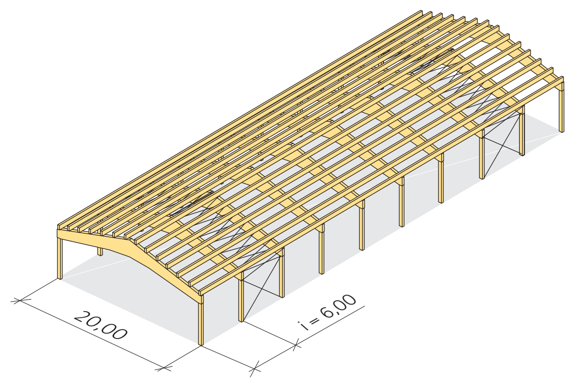
Dimensionera bumerangbalken enligt nedan.





Bestäm tvärsnittets mått enligt den preliminära dimensioneringen beskriven i *avsnitt 3.4, sidan 2*.

Balken är av limträ, hållfasthetsklass	GL30c
Säkerhetsklass 3	$\gamma_d = 1$
Klimatklass 1	
Partialkoefficient för permanent last	$\gamma_g = 1{,}2$
Partialkoefficient för snölast	$\gamma_s = 1{,}5$
Partialkoefficient för limträ	$\gamma_M = 1{,}25$



3.2 Laster

Beakta följande laster vid dimensionering:

Limträbalkar

$$g_{k,1} = 1{,}2 \text{ kN/m}$$

Övrig permanent last

$G_{k,2} = 0{,}60 \text{ kN/m}^2$ $\qquad$ $g_{k,2} = G_{k,2} \cdot i \cdot 1{,}1 = 0{,}60 \cdot 6 \cdot 1{,}1 = 4 \text{ kN/m}$

Snölast

$S_k = 1{,}5 \text{ kN/m}^2$ $\qquad$ $s_k = S_k \cdot i \cdot \mu \cdot 1{,}1 = 1{,}5 \cdot 6 \cdot 0{,}98 \cdot 1{,}1 = 9{,}7 \text{ kN/m}$

Faktorn 1,1 i ekvationerna ovan beaktar att sekundärbalkarna är kontinuerliga över primärbalkarna.

3.3 Lastkombinationer

Beakta två lastkombinationer (*SS-EN 1990, avsnitt 6.4.3* och *SS-EN 1991-1-3, avsnitt 5.3.3*):

Kombination 1 (egentyngd, permanent last, k_{mod} = 0,6):

$$q_{dI} = \gamma_d \cdot \left[\gamma_g \cdot \left(g_{k,1} + g_{k,2}\right)\right] = 1 \cdot 1{,}2\left(1{,}2 + 4\right) = 6{,}2 \text{ kN/m}$$

Kombination 2 (egentyngd + snölast, medellång last, k_{mod} = 0,8):

$$q_{dII} = \gamma_d \cdot \left[\gamma_g \cdot \left(g_{k,1} + g_{k,2}\right) + \gamma_s \cdot s_k\right] = 1 \cdot \left[1{,}2 \cdot \left(1{,}2 + 4\right) + 1{,}5 \cdot 9{,}7\right] = 20{,}8 \text{ kN/m}$$

Välj den kritiska kombinationen i brottgränstillståndet:

$$\frac{q_{dI}}{k_{mod,1}} = \frac{6{,}2}{0{,}6} = 10{,}3 \quad < \quad \frac{q_{dII}}{k_{mod,2}} = \frac{20{,}8}{0{,}8} = 26{,}0$$

Sålunda är kombination 2 dimensionerande.

3.4 Preliminär dimensionering

Balk:

$$r \geq 10 \text{ m} \quad \rightarrow \quad r = 18 \text{ m}$$

$$b = \frac{l_{tot}}{100} = \frac{20 \cdot 10^3}{100} = 200 \text{ mm} \quad \rightarrow \quad b = 215 \text{ mm}$$

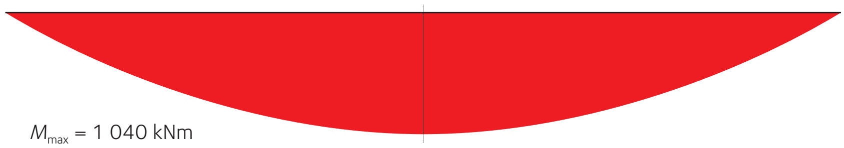
$$h_{apex} = \frac{l_{tot}}{13} = \frac{20 \cdot 10^3}{13} = 1538 \text{ mm} \quad \rightarrow \quad h_{apex} = 1600 \text{ mm}$$

$$h_0 = \frac{l_{tot}}{30} = \frac{20 \cdot 10^3}{30} = 667 \text{ mm} \quad \rightarrow \quad h_0 = 800 \text{ mm}$$

3.5 Inre krafter och moment

Tvärkraft:

Böjmoment:



3.6 Beräkningar i brottgränstillstånd

a) Skjuvning

Beräkna dimensioneringsvärdet för skjuvspänningen τ_d utgående från tvärkraftens reducerade värde vid upplag, V_{red}, *se tabell 8.5, sidan 2 i avsnitt 8*:

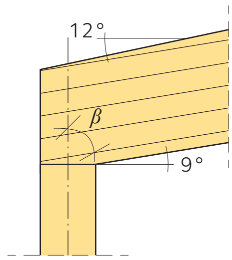
$$V_{red} = \frac{2 \cdot V_{Ed}}{l_{tot}} \cdot \left(\frac{l_{tot}}{2} - \frac{h_{col}}{2} - h_0 \right) = \frac{2 \cdot 208}{20 \cdot 10^3} \cdot \left(\frac{20 \cdot 10^3}{2} - \frac{360}{2} - 800 \right) = 188 \text{ kN}$$

$$\tau_d = \frac{3 \cdot V_{red}}{2 \cdot b \cdot h_0} = \frac{3 \cdot 188 \cdot 10^3}{2 \cdot 215 \cdot 800} = 1{,}64 \text{ MPa}$$

Kontrollera villkoret för skjuvspänning (*SS-EN 1995-1-1, ekvation 6.13*):

$$\frac{\tau_d}{f_{v,d} \cdot k_{cr}} = \frac{1{,}64}{2{,}24 \cdot 0{,}86} = 0{,}85 \quad < 1 \quad \textbf{OK}$$

b) Tryck i en vinkel β mot fibrerna vid upplag



I detta exempel studerar vi upplag på en 360 mm pelare:

$$\beta = 90° - \alpha_{int} = 90° - 9° = 81°$$

Tryckspänningen vid upplaget är:

$$\sigma_{c,\beta,d} = \frac{q_{dII} \cdot l_{tot}}{2 \cdot b_{col} \cdot \left(h_{col} + 30 \cdot \cos(9°) \right)} = \frac{20{,}8 \cdot 20 \cdot 10^3}{2 \cdot 215 \cdot \left(360 + 30 \cdot \cos(9°) \right)} = 2{,}48 \text{ MPa}$$

Tryckhållfasthet i en vinkel β mot fibrerna:

$$f_{c,\beta,d} = \frac{f_{c,0,d}}{\frac{f_{c,0,d}}{\left(k_{c,90} \cdot f_{c,90,k} \right)} \cdot \left(\sin(\beta) \right)^2 + \left(\cos(\beta) \right)^2} = \frac{15{,}68}{\frac{15{,}68}{1{,}75 \cdot 1{,}6} \cdot \sin(81°)^2 + \cos(81°)^2} = 2{,}86 \text{ MPa}$$

$f_{c,90,d}$ kan inte ersättas med $f_{c,90,k}$ eftersom g_k/s_k = 0,54 > 0,4, *se tabell 8.11 och 8.12, sidan 5 i avsnitt 8* och *8.13, sidan 6 i avsnitt 8*.

Kontrollera villkoret för tryckspänning i en vinkel β mot fibrerna (*SS-EN 1995-1-1, ekvation 6.16*):

$$\frac{\sigma_{c,\beta,d}}{f_{c,\beta,d}} = \frac{2{,}48}{2{,}86} = 0{,}87 \quad < 1 \quad \textbf{OK}$$

c) Böjspänning i tvärsnittet med den största påkänningen

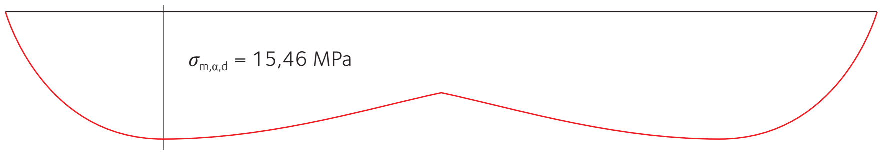
$$x_{\text{max}} = \frac{l_{\text{tot}} \cdot h_0}{2 \cdot h_{\text{apex}}} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 800}{2 \cdot 1600} = 5000 \text{ mm}$$

$$M_{\text{x,max}} = \frac{q_{\text{dII}} \cdot x_{\text{max}}}{2} \cdot \left(l_{\text{tot}} - x \max\right) = \frac{20,8 \cdot 5}{2} \cdot \left(20 - 5\right) = 780 \text{ kNm}$$

$$h_{\text{x,max}} = 848 + \left(x_{\text{max}} - \frac{h_{\text{col}}}{2}\right) \cdot \left(\tan\left(\alpha_{\text{ext}}\right) - \tan\left(\alpha_{\text{int}}\right)\right) \cdot \cos\left(\alpha_{\text{int}}\right) = 848 + \left(5000 - \frac{360}{2}\right) \cdot \left(\tan\left(12°\right) - \tan\left(9°\right)\right) \cdot \cos\left(9°\right) = 1105,9 \text{ mm}$$

$$\sigma_{\text{m},\alpha,\text{d}} = \frac{6 M_{\text{x,max}}}{b \cdot h_{\text{x,max}}^{\;2}} = \frac{6 \cdot 780 \cdot 10^6}{215 \cdot 1105,9^2} = 17,8 \text{ MPa}$$

Böjspänningsdiagram:



Förminska böjhållfastheten med faktor $k_{\text{m},\alpha}$, som beaktar samtidig verkan av böjspänning, skjuvspänning och tryckspänning:

$$k_{\text{m},\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_{\text{m,d}}}{1,5 \cdot f_{\text{v,d}}} \cdot \tan\left(\Delta_\alpha\right)\right)^2 + \left[\frac{f_{\text{m,d}}}{f_{\text{c,90,d}}} \cdot \left(\tan\left(\Delta_\alpha\right)\right)^2\right]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{19,2}{1,5 \cdot 2,24} \cdot \tan\left(12° - 9°\right)\right)^2 + \left[\frac{19,2}{1,6} \cdot \left(\tan\left(12° - 9°\right)\right)^2\right]^2}} = 0,96$$

Kontrollera villkoret för böjspänning (*SS-EN 1995-1-1, ekvation 6.38*):

$$\frac{\sigma_{\text{m},\alpha,\text{d}}}{k_{\text{m},\alpha} \cdot f_{\text{m,d}}} = \frac{17,8}{0,96 \cdot 19,2} = 0,97 \quad < 1 \quad \textbf{OK}$$

d) Böjspänning vid nocken

Multiplicera böjspänningen vid nocken med faktorn k_l, som beaktar att neutralaxeln inte är i mitten av tvärsnittet (*SS-EN 1995-1-1, ekvation 6.43*):

$$k_1 = 1 + 1,4 \cdot \tan\left(\alpha_{\text{ext}}\right) + 5,4 \cdot \left(\tan\left(\alpha_{\text{ext}}\right)\right)^2 = 1 + 1,4 \cdot \tan\left(12°\right) + 5,4 \cdot \tan\left(12°\right)^2 = 1,54$$

$$k_2 = 0,35 - 8 \cdot \tan\left(\alpha_{\text{ext}}\right) = 0,35 - 8 \cdot \tan\left(12°\right) = -1,35$$

$$k_3 = 0,6 + 8,3 \cdot \tan\left(\alpha_{\text{ext}}\right) - 7,8 \cdot \left(\tan\left(\alpha_{\text{ext}}\right)\right)^2 = 0,6 + 8,3 \cdot \tan\left(12°\right) - 7,8 \cdot \tan\left(12°\right)^2 = 2,01$$

$$k_4 = 6 \cdot \left(\tan\left(\alpha_{\text{ext}}\right)\right)^2 = 6 \cdot \tan\left(12°\right)^2 = 0,27$$

$$R = R_{\text{int}} + 0,5 \cdot h_{\text{apex}} = 18 \cdot 10^3 + 0,5 \cdot 1,6 \cdot 10^3 = 1,88 \cdot 10^4 \text{ mm}$$

$$k_l = k_1 + k_2 \cdot \left(\frac{h_{\text{apex}}}{R}\right) + k_3 \cdot \left(\frac{h_{\text{apex}}}{R}\right)^2 + k_4 \cdot \left(\frac{h_{\text{apex}}}{R}\right)^3 = 1,54 + -1,35 \cdot \frac{1,6 \cdot 10^3}{1,88 \cdot 10^4} + 2,01 \cdot \left(\frac{1,6 \cdot 10^3}{1,88 \cdot 10^4}\right)^2 + 0,27 \cdot \left(\frac{1,6 \cdot 10^3}{1,88 \cdot 10^4}\right)^3 = 1,44$$

Böjspänning:

$$\sigma_{\text{md}} = k_l \cdot \frac{6 \cdot M_{\text{max}}}{b \cdot h_{\text{apex}}^{\;2}} = 1,44 \cdot \frac{6 \cdot 1040 \cdot 10^6}{215 \cdot 1600^2} = 16,3 \text{ MPa}$$

Förminska draghållfastheten parallellt fibrerna med faktor k_r (*SS-EN 1995-1-1, ekvation 6.49*):

$$\frac{R_{int}}{45} = \frac{18 \cdot 10^3}{45} = 400$$

$$k_r = 1,0$$

Kontrollera villkoret för böjspänning (*SS-EN 1995-1-1, ekvation 6.41*):

$$\frac{\sigma_{m,d}}{k_r \cdot f_{m,d}} = \frac{16,3}{1 \cdot 19,2} = 0,85 \quad < 1 \quad \textbf{OK}$$

e) Dragning vinkelrätt fibrerna vid nocken

Faktor k_p (*SS-EN 1995-1-1, ekvation 6.56*):

$$k_5 = 0,2 \cdot \tan(\alpha_{ext}) = 0,2 \cdot \tan(12°) = 0,04$$

$$k_6 = 0,25 - 1,5 \cdot \tan(\alpha_{ext}) + 2,6 \cdot (\tan(\alpha_{ext}))^2 = 0,25 - 1,5 \cdot \tan(12°) + 2,6 \cdot \tan(12°)^2 = 0,05$$

$$k_7 = 2,1 \cdot \tan(\alpha_{ext}) - 4 \cdot (\tan(\alpha_{ext}))^2 = 2,1 \cdot \tan(12°) - 4 \cdot \tan(12°)^2 = 0,27$$

$$k_p = k_5 + k_6 \cdot \left(\frac{h_{apex}}{R}\right) + k_7 \cdot \left(\frac{h_{apex}}{R}\right)^2 = 0,04 + 0,05 \cdot \frac{1,6 \cdot 10^3}{1,88 \cdot 10^4} + 0,27 \cdot \left(\frac{1,6 \cdot 10^3}{1,88 \cdot 10^4}\right)^2 = 0,05$$

Dragspänning (*SS-EN 1995-1-1, ekvation 6.54*):

$$\sigma_{t,90,d} = k_p \cdot \frac{6 \cdot M_{max}}{b \cdot h_{apex}^{\ 2}} - 0,6 \cdot \frac{q_{dII}}{b} = 0,05 \cdot \frac{6 \cdot 1040 \cdot 10^6}{215 \cdot 1600^2} - 0,6 \cdot \frac{20,8}{215} = 0,51 \text{ MPa}$$

Modifiera draghållfastheten vinkelrätt mot fibrerna med faktorerna k_{vol} och k_{dis} (*SS-EN 1995-1-1, ekvation 6.51 och 6.52*):

$$Vol = b \cdot \left[(R_{int} + h_{apex})^2 \cdot \sin(\alpha_{int}) \cdot (\cos(\alpha_{int}) - \sin(\alpha_{int}) \cdot \tan(\alpha_{ext} - \alpha_{int})) - R_{int}^{\ 2} \cdot \frac{\alpha_{int} \cdot \pi}{180°} \right] = 1,713 \text{ m}^3$$

$$k_{dis} = 1,7$$

$$k_{vol} = \left(\frac{V_0}{Vol}\right)^{0,2} = \left(\frac{0,01}{1,713}\right)^{0,2} = 0,357$$

Kontrollera villkoret för dragspänning vinkelrätt mot fibrerna (*SS-EN 1995-1-1, ekvation 6.50*):

$$\frac{\sigma_{t,90,d}}{k_{dis} \cdot k_{vol} \cdot f_{t,90,d}} = \frac{0,51}{1,7 \cdot 0,36 \cdot 0,32} = 2,6 \quad > 1 \quad \textbf{EJ OK}$$

Balken behöver förstärkas för dragspänning vinkelrätt mot fibrerna vid nockområdet; dimensionering av förstärkning visas i *exempel 16*.

f) Vippningskontroll

Balken är stagad i sidled. Avståndet mellan stagpunkterna är 1,80 m. Anta att sadelbalkens höjd är konstant mellan två takåsar. Kontrollera vippning där böjmomentet har sitt maximivärde, $x = x_{max}$:

$$\sigma_{m,\alpha,d} = \frac{6 M_{x,max}}{b \cdot h_{x,max}^{2}} = \frac{6 \cdot 780 \cdot 10^6}{215 \cdot 1105{,}89^2} = 17{,}8 \text{ MPa}$$

Effektiv vippningslängd:

$$l_{0,z} = 1{,}80 \text{ m}$$

Kritisk böjspänning:

$$\sigma_{cr,m} = \frac{\pi}{l_{0,z} \cdot W_y} \cdot \sqrt{E_{0,05} \cdot I_z \cdot G_{05} \cdot I_{tor}} = \frac{\pi}{1{,}8 \cdot 10^3 \cdot \frac{1105{,}9^2 \cdot 215}{6}} \cdot \sqrt{10800 \cdot \frac{1105{,}9 \cdot 215^3}{12} \cdot 542 \cdot \frac{215^3 \cdot 1105{,}9}{3}} = 176{,}5 \text{ MPa}$$

Relativt slankhetstal:

$$\lambda_{rel,m} = \sqrt{\frac{f_{m,k}}{\sigma_{cr,m}}} = \sqrt{\frac{30}{176{,}5}} = 0{,}4$$

Reduktionsfaktor vid vippning:

$$k_{crit} = 1$$

Reduktionsfaktor vid vippning är lika med 1. Sålunda behöver vippning inte ytterligare kontrolleras.

3.7 Beräkningar i bruksgränstillstånd

Beakta två lastkombinationer:

Kombination SLS 1 (permanenta laster):

$$q_{sls,1} = g_{k,1} + g_{k,2} = 5{,}2 \text{ kN/m}$$

Kombination SLS 2 (snölast):

$$q_{sls,2} = s_k = 9{,}7 \text{ kN/m}$$

Beräkna initialnedböjningen vid nocken av jämnt fördelad last q_1, *se Projektering av limträkonstruktioner, avsnitt 6.2.6*:

$$k_I = 0{,}15 + 0{,}85 \cdot \frac{h_0}{h_{apex}} = 0{,}58$$

$$w_{1,bending} = \frac{5}{384} \cdot \frac{l_{tot}^{4}}{E_{0mean} \cdot \frac{b \cdot h_{apex}^{3}}{12}} \cdot \frac{1}{k_I} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha_{ext} + \alpha_{int}}{2}\right)} = \frac{5}{384} \cdot \frac{20000^4}{13000 \cdot \frac{215 \cdot 1600^3}{12}} \cdot \frac{1}{0{,}6} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{12° + 9°}{2}\right)} = 3{,}9 \text{ mm}$$

$$w_{1,shear} = 1{,}2 \cdot \frac{l_{tot}^{2}}{8 \cdot G_{mean} \cdot b \cdot h_0} \cdot \frac{2 \cdot h_0^{\frac{2}{3}}}{h_0^{\frac{2}{3}} + h_{apex}^{\frac{2}{3}}} = 0{,}4 \text{ mm}$$

Nedböjning förorsakad av skjuvning beaktas inte:

$$w_1 = w_{1,\text{bending}} = 3{,}9 \text{ mm}$$

Initialnedböjning förorsakad av permanent last:

$$w_{\text{inst,permanent}} = w_1 \cdot q_{\text{sls,1}} = 3{,}9 \cdot 5{,}2 = 19{,}9 \text{ mm}$$

Initialnedböjning förorsakad av snölast:

$$w_{\text{inst,snow}} = w_1 \cdot q_{\text{sls,2}} = 3{,}9 \cdot 9{,}7 = 37{,}8 \text{ mm}$$

Kontrollera villkoret för initialnedböjning, *se tabell 11.4, sidan 2 i avsnitt 11*:

$$w_{\text{inst,permanent}} + w_{\text{inst,snow}} = 57{,}7 \text{ mm} \quad < \quad \frac{l_{\text{tot}}}{300 / 1{,}5} = 100 \text{ mm} \quad \textbf{OK}$$

Slutlig nedböjning förorsakad av permanent last:

$$w_{\text{final,perm}} = w_{\text{inst,permanent}} \cdot \left(1 + k_{\text{def}}\right) = 19{,}9 \cdot \left(1 + 0{,}6\right) = 31{,}9 \text{ mm}$$

Slutlig nedböjning förorsakad av snölast:

$$w_{\text{final,snow}} = w_{\text{inst,snow}} \cdot \left(1 + \psi_{2,\text{snow}} \cdot k_{\text{def}}\right) = 37{,}8 \cdot \left(1 + 0{,}1 \cdot 0{,}6\right) = 40{,}1 \text{ mm}$$

Total slutlig nedböjning:

$$w_{\text{final,tot}} = w_{\text{final,snow}} + w_{\text{final,perm}} = 40{,}1 + 31{,}9 = 72{,}0 \text{ mm}$$

Kontrollera villkoret för total slutlig nedböjning, *se tabell 11.4, sidan 2 i avsnitt 11*:

$$w_{\text{final,tot}} = 72{,}0 \text{ mm} \quad < \quad \frac{l_{\text{tot}}}{250 / 1{,}5} = 120 \text{ mm} \quad \textbf{OK}$$