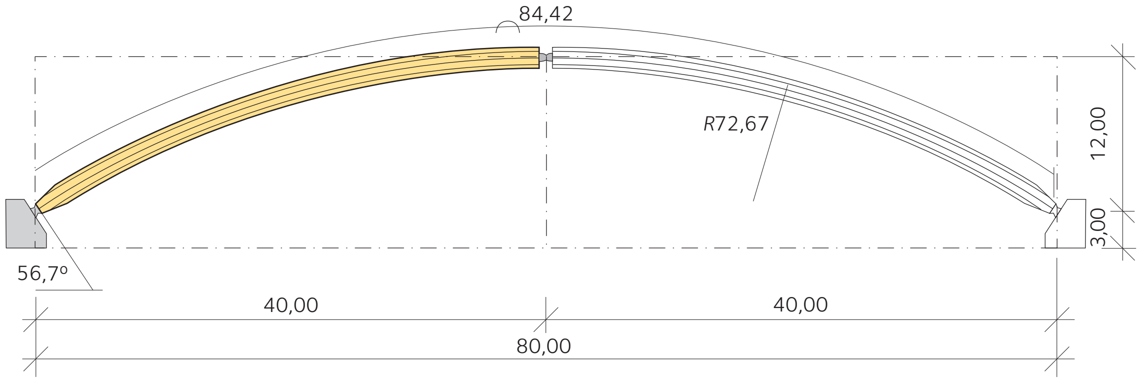
Exempel 13: Treledsbåge

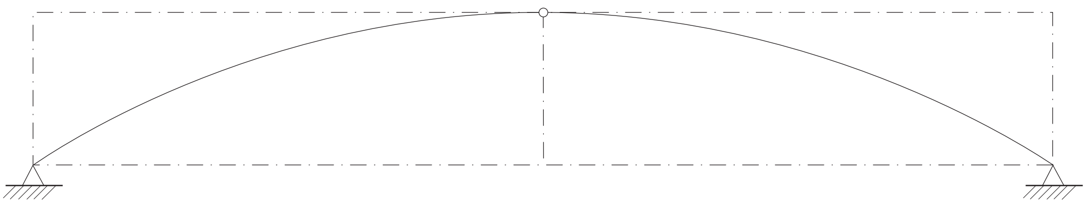
13.1 Konstruktion, mått och dimensioneringsunderlag

Dimensionera treledsbågen enligt nedan.

Treledsbåge

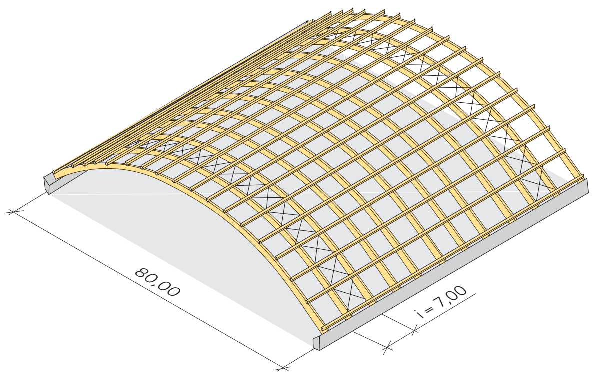


Statisk modell



Bestäm tvärsnittets mått enligt den preliminära dimensioneringen beskriven i *avsnitt 13.4, sidan 3*.

Bågen är av limträ, hållfasthetsklass	GL30c
Säkerhetsklass 3	$\gamma_d = 1$
Klimatklass 1	
Partialkoefficient för permanent last	$\gamma_g = 1,2$
Partialkoefficient för variabel last	$\gamma_s = 1,5$
Partialkoefficient för limträ	$\gamma_M = 1,25$

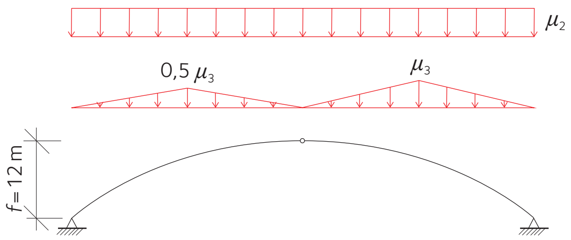


13.2 Laster

Använd följande formfaktorer för snölast (*SS-EN 1991-1-3, avsnitt 6.3.8*):

$$\mu_2 = 0{,}8$$

$$\mu_3 = 0{,}2 + 10 \cdot \frac{f}{l_{\text{tot}}} = 0{,}2 + 10 \cdot \frac{12}{80} = 1{,}7$$



Beakta följande laster vid dimensionering:

Limträbalkar

$$g_{\text{k,1}} = 3 \text{ kN/m}$$

Övrig permanent last

$$G_{\text{k,2}} = 0{,}75 \text{ kN/m}^2 \qquad g_{\text{k,2}} = G_{\text{k,2}} \cdot i \cdot 1{,}1 = 0{,}75 \cdot 7 \cdot 1{,}1 = 5{,}78 \text{ kN/m}$$

Symmetrisk snölast

$$S_{\text{k}} = 2{,}0 \text{ kN/m} \qquad s_{\text{k,2}} = S_{\text{k}} \cdot \mu_2 \cdot i \cdot 1{,}1 = 2{,}0 \cdot 0{,}8 \cdot 7 \cdot 1{,}1 = 12{,}32 \text{ kN/m}$$

Osymmetrisk snölast

$$s_{\text{k,3}} = S_{\text{k}} \cdot \mu_3 \cdot i \cdot 1{,}1 = 2{,}0 \cdot 1{,}7 \cdot 7 \cdot 1{,}1 = 26{,}18 \text{ kN/m}$$

Egenvikten beaktad i ekvationerna ovan är lasternas projektion i horisontalplanet. Faktorn 1,1 i ekvationerna ovan beaktar att sekundärbalkarna är kontinuerliga över primärbalkarna. Det förutsätts i detta exempel att snörasskydd saknas.

13.3 Lastkombinationer

Beakta tre lastkombinationer (*SS-EN 1990, avsnitt 6.4.3*):

Kombination 1 (egentyngd, permanent last, k_{mod} = 0,6):

$$q_{\text{dI}} = \gamma_{\text{d}} \cdot \left[\gamma_{\text{g}} \cdot \left(g_{\text{k,1}} + g_{\text{k,2}}\right)\right] = 1{,}2 \cdot \left(3 + 5{,}78\right) = 10{,}53 \text{ kN/m}$$

Kombination 2 (egentyngd + symmetrisk snölast, medellång last, k_{mod} = 0,8):

$$q_{\text{dII}} = \gamma_{\text{d}} \cdot \left[\gamma_{\text{g}} \cdot \left(g_{\text{k,1}} + g_{\text{k,2}}\right) + \gamma_{\text{s}} \cdot s_{\text{k,2}}\right] = \left[1{,}2 \cdot \left(3 + 5{,}78\right) + 1{,}5 \cdot 12{,}32\right] = 29{,}01 \text{ kN/m}$$

Kombination 3 (egentyngd + osymmetrisk snölast, medellång last, k_{mod} = 0,8):

$$q_{\text{dIIIA}} = \gamma_{\text{d}} \cdot \left[\gamma_{\text{g}} \cdot \left(g_{\text{k,1}} + g_{\text{k,2}}\right) + \gamma_{\text{s}} \cdot s_{\text{k,3}}\right] = \left[1{,}2 \cdot \left(3 + 5{,}78\right) + 1{,}5 \cdot 26{,}18\right] = 49{,}8 \text{ kN/m}$$

$$q_{\text{dIIIB}} = \gamma_{\text{d}} \cdot \left[\gamma_{\text{g}} \cdot \left(g_{\text{k,1}} + g_{\text{k,2}}\right) + \gamma_{\text{s}} \cdot 0{,}5 \cdot s_{\text{k,3}}\right] = \left[1{,}2 \cdot \left(3 + 5{,}78\right) + 1{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 26{,}18\right] = 30{,}16 \text{ kN/m}$$

13.4 Preliminär dimensionering

Utför preliminär dimensionering enligt rekommendationerna i *Projektering av limträkonstruktioner, avsnitt 11.2*:

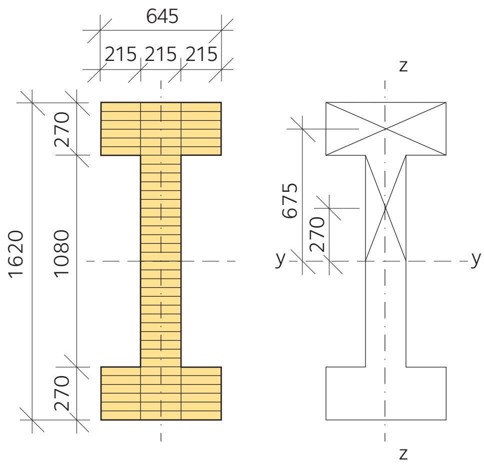
$$f = 0{,}15 l_{\text{tot}} = 0{,}15 \cdot 80 = 12 \text{ m}$$

$$h_{\min} = \frac{l_{\text{tot}}}{50} = \frac{80 \cdot 10^3}{50} = 1600 \text{ mm} \quad \rightarrow \quad h = 1620 \text{ mm}$$

Välj tillräckligt stort tvärsnitt för att motverka vippning, i synnerhet under montage:

$$b_{\min} = \frac{h_{\min}}{3} = \frac{1600}{3} = 533 \text{ mm} \quad \rightarrow \quad b = 645 \text{ mm}$$

Använd ett I-tvärsnitt för att minska åtgången av limträ och för att optimera de mekaniska egenskaperna. Det förutsätts att full samverkan uppnås, exempelvis via skruvlimning.



Area:

$$A = 215 \cdot 1620 + 4 \cdot 215 \cdot 270 = 580500 \text{ mm}^2$$

Statiskt moment omkring y-axeln:

$$S_y = (645 \cdot 270) \cdot 675 + \left(215 \cdot \frac{1080}{2}\right) \cdot 270 = 1{,}49 \cdot 10^8 \text{ mm}^3$$

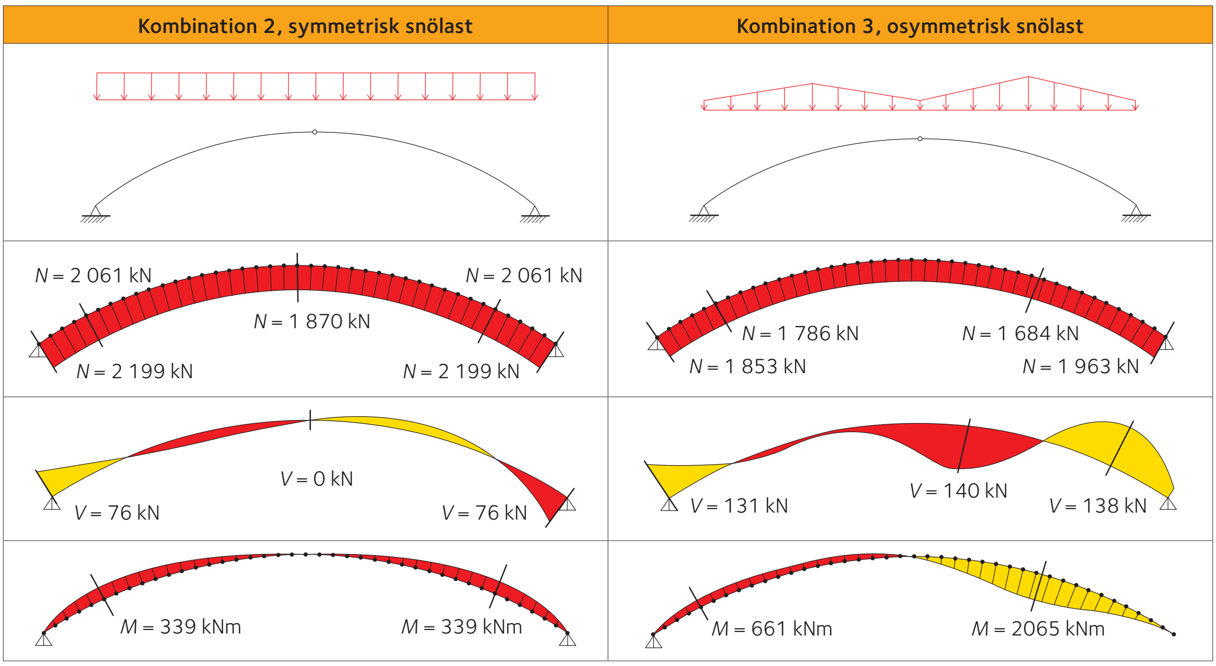
Tröghetsmoment omkring y-axeln:

$$I_y = \frac{645 \cdot (1620)^3}{12} - 2 \cdot \frac{215 \cdot 1080^3}{12} = 1{,}83 \cdot 10^{11} \text{ mm}^4$$

Tröghetsmoment omkring z-axeln:

$$I_z = \frac{1620 \cdot 645^3}{12} - 2 \cdot \left(\frac{1080 \cdot 215^3}{12} + 1080 \cdot 215 \cdot 215^2\right) = 1{,}3 \cdot 10^{10} \text{ mm}^4$$

13.5 Inre krafter och moment



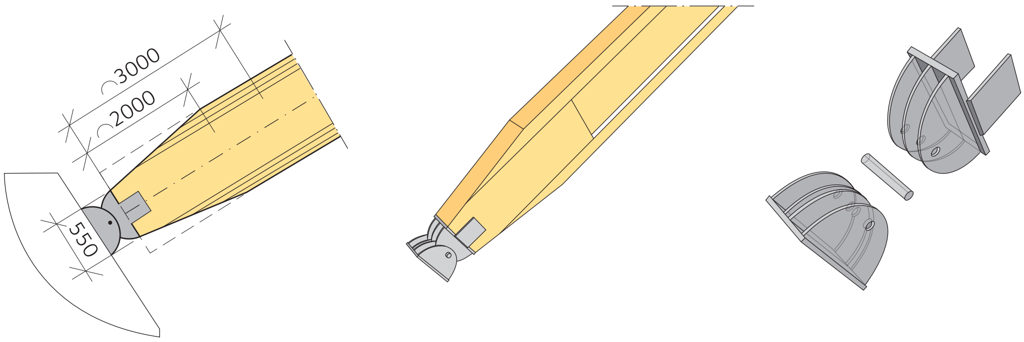
13.6 Beräkningar i brottgränstillstånd, bågen

a) Tryck parallellt med fibrerna

Kombination 1 är dimensionerande. Tvärsnittet med den största påkänningen är vid upplagen.

Observera att bågens tvärsnitt vid upplagen är fyrkantiga och inte I-formade. Båghöjden avsmalnar mot upplaget så att det går åt mindre stål för förbandet.

Ett möjligt förband vid upplagen visas nedan.



Kontrollera villkoret för tryckspänning parallellt med fibrerna (*SS-EN 1995-1-1, ekvation 6.2*):

$$\sigma_{\mathrm{c,0,d}} = \frac{N_{\mathrm{Ed}}}{b \cdot h} = \frac{2199 \cdot 10^3}{645 \cdot 550} = 6{,}2 \text{ MPa}$$

$$\frac{\sigma_{\mathrm{c,0,d}}}{f_{\mathrm{c,0,d}}} = \frac{6{,}2}{15{,}68} = 0{,}4 \quad < 1 \quad \textbf{OK}$$

b) Skjuvning

Kombination 3 är dimensionerande:

$$\tau_{\mathrm{d}} = \frac{V_{\mathrm{Ed}} \cdot S_{\mathrm{y}}}{b_{\mathrm{I}} \cdot I_{\mathrm{y}}} = \frac{140 \cdot 10^3 \cdot 1{,}49 \cdot 10^8}{215 \cdot 1{,}83 \cdot 10^{11}} = 0{,}53 \text{ MPa}$$

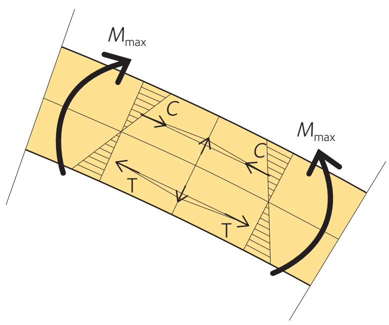
Kontrollera villkoret för skjuvspänning (*SS-EN 1995-1-1, ekvation 6.13*):

$$\frac{\tau_{\mathrm{d}}}{f_{\mathrm{v,d}} \cdot k_{\mathrm{cr}}} = \frac{0{,}53}{2{,}24 \cdot 0{,}86} = 0{,}28 \quad < 1 \quad \textbf{OK}$$

c) Dragning vinkelrätt fibrerna

Bågens krökning förorsakar dragspänning vinkelrätt mot fibrerna. Dessa har sitt maximivärde där böjmomentet har sitt maximivärde:

$$\sigma_{\mathrm{t,90,d}} = \frac{M_{\mathrm{Ed}}}{I_{\mathrm{y}}} \cdot \frac{h}{2} \cdot \left(\frac{h}{4 \cdot r_{\mathrm{curve}}} \right) = \frac{2065 \cdot 10^6}{1{,}83 \cdot 10^{11}} \cdot \frac{1620}{2} \cdot \frac{1620}{4 \cdot 72{,}67 \cdot 10^3} = 0{,}05 \text{ MPa}$$



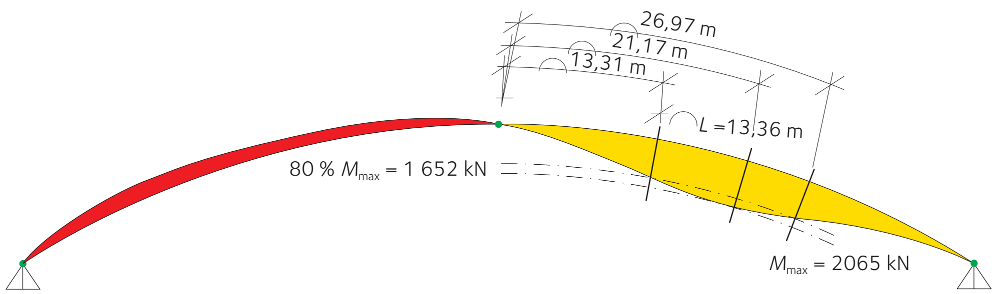
Referensvolym:

$$V_0 = 0{,}01 \text{ m}^3$$

Belastad volym:

$$V_{\mathrm{arch}} = l_{\mathrm{curve}} \cdot A = 13{,}36 \cdot 0{,}58 = 7{,}76 \text{ m}^3$$

Enligt Australian building code AS 1720.1—1997, beaktas vid beräkning av k_{vol} bara den volym som utsätts för ett böjmoment som är 80 — 100 procent av maximimomentet, *se Projektering av limträkonstruktioner, avsnitt 11*.



Kontrollera villkoret för dragspänning vinkelrätt mot fibrerna (*SS-EN 1995-1-1, ekvation 6.50*):

$$\frac{\sigma_{t,90,d}}{k_{dis}\cdot\left(\frac{V_0}{V_{arch}}\right)^{0,2}\cdot f_{t,90,d}} = \frac{0,05}{1,4\cdot\left(\frac{0,01}{7,76}\right)^{0,2}\cdot 0,32} = 0,43 \quad < 1 \quad \textbf{OK}$$

d) Stabilitetskontroll för samtidig böjning och tryck

Bågen är stagad i sidled. Avståndet mellan stagpunkterna är 6 m.
Kombination 3 är dimensionerande:

$$\sigma_{c,0,d} = \frac{N_{Ed}}{A} = \frac{1684\cdot 10^3}{580500} = 2,9\text{ MPa} \qquad \sigma_{m,y,d} = \frac{M_{Ed}}{I_y}\cdot\frac{h}{2} = \frac{2065\cdot 10^6}{1,83\cdot 10^{11}}\cdot\frac{1620}{2} = 9,12\text{ MPa}$$

Stabilitetskontroll kring z-axeln (utknäckning i y-riktning).

Knäcklängd:

$$l_{0,z} = 6\text{ m}$$

Kritisk Eulerspänning:

$$\sigma_{cr,z} = \frac{\pi^2\cdot E_{0,05}\cdot I_z}{A\cdot l_{0z}^{\ 2}} = \frac{\pi^2\cdot 10800\cdot 1,3\cdot 10^{10}}{580500\cdot\left(6\cdot 10^3\right)^2} = 66,15\text{ MPa}$$

Relativt slankhetstal:

$$\lambda_{rel,z} = \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{\sigma_{cr,z}}} = \sqrt{\frac{24,5}{66,15}} = 0,61$$

Faktor *k*:

$$k_z = \frac{1}{2}\cdot\left[1+\beta_c\cdot\left(\lambda_{rel,z}-0,3\right)+\lambda_{rel,z}^{\ 2}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[1+0,1\cdot\left(0,61-0,3\right)+0,61^2\right] = 0,7$$

Reduktionsfaktor vid knäckning:

$$k_{c,z} = \frac{1}{k_z+\sqrt{k_z^{\ 2}-\lambda_{rel,z}^{\ 2}}} = \frac{1}{0,7+\sqrt{0,7^2-0,61^2}} = 0,95$$

Vippningskontroll

Effektiv vippningslängd:

$$l_{0,z} = 6 \text{ m}$$

Kritisk böjspänning:

$$\sigma_{cr,m} = \frac{\pi \cdot \sqrt{E_{0,05} \cdot I_z \cdot G_{05} \cdot I_{tor}}}{l_{0,z} \cdot I_y \cdot \dfrac{2}{h}} = \frac{\pi \cdot \sqrt{10800 \cdot 1{,}3 \cdot 10^{10} \cdot 540 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{10}}}{6 \cdot 10^3 \cdot 1{,}83 \cdot 10^{11} \cdot \dfrac{2}{1620}} = 69{,}8 \text{ MPa}$$

Relativt slankhetstal:

$$\lambda_{rel,m} = \sqrt{\frac{f_{m,k}}{\sigma_{cr,m}}} = 0{,}66$$

Reduktionsfaktor vid vippning:

$$k_{crit} = 1$$

Multiplicera böjspänningen vid nocken med faktorn k_l, som beaktar krökningen av bågen (*SS-EN 1995-1-1, ekvation 6.43*):

$$k_l = 1 + 0{,}35 \cdot \left(\frac{h}{r_{curve}}\right) + 0{,}6 \cdot \left(\frac{h}{r_{curve}}\right)^2 = 1 + 0{,}35 \cdot \frac{1620}{72{,}67 \cdot 10^3} + 0{,}6 \cdot \left(\frac{1620}{71{,}67 \cdot 10^3}\right)^2 = 1{,}01$$

Kontrollera villkoret för vippning och knäckning kring z-axeln (*SS-EN 1995-1-1, ekvation 6.35*):

$$\left(\frac{\sigma_{m,y,d} \cdot k_l}{k_{crit} \cdot f_{m,d}}\right)^2 + \frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} \cdot f_{c,0,d}} = \left(\frac{9{,}12 \cdot 1{,}01}{19{,}2}\right)^2 + \frac{2{,}9}{0{,}95 \cdot 15{,}68} = 0{,}42 \quad < 1 \quad \textbf{OK}$$

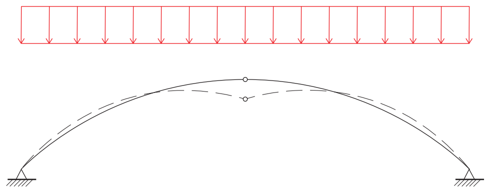
Kontrollera villkoret för knäckning kring z-axeln och böjning kring y-axeln (*SS-EN 1995-1-1, ekvation 6.24*):

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} \cdot f_{c,0,d}} + 0{,}7 \cdot \frac{\sigma_{m,y,d} \cdot k_l}{f_{m,d}} = \frac{2{,}9}{0{,}95 \cdot 15{,}68} + 0{,}7 \cdot \frac{9{,}12 \cdot 1{,}01}{19{,}2} = 0{,}53 \quad < 1 \quad \textbf{OK}$$

e) Stabilitetskontroll i bågens plan för samtidig böjning och tryck

Här presenteras två beräkningsmodeller för lastkombinationerna 2 och 3.

Kombination 2, symmetrisk snölast:



$$\sigma_{\mathrm{c,0,d}} = \frac{N_{\mathrm{Ed}}}{A} = \frac{2061 \cdot 10^3}{580500} = 3{,}55\ \mathrm{MPa}$$

$$\sigma_{\mathrm{m,y,d}} = \frac{M_{\mathrm{Ed}}}{I_{\mathrm{y}}} \cdot \frac{h}{2} = \frac{339 \cdot 10^6}{1{,}83 \cdot 10^{11}} \cdot \frac{1620}{2} = 1{,}5\ \mathrm{MPa}$$

Handberäkning
Stabilitetskontroll kring y-axeln (utknäckning i z-riktning)

Knäcklängd, *se Projektering av limträkonstruktioner, ekvation 11.23*:

$$l_{0,\mathrm{y}} = 1{,}25 \cdot \frac{l_{\mathrm{curve}}}{2} = 1{,}25 \cdot \frac{84{,}42}{2} = 52{,}76\ \mathrm{m}$$

Kritisk Eulerspänning:

$$\sigma_{\mathrm{cr,y}} = \frac{\pi^2 \cdot E_{0,05} \cdot I_{\mathrm{y}}}{A \cdot l_{0,\mathrm{y}}^{\ 2}} = \frac{\pi^2 \cdot 10800 \cdot 1{,}83 \cdot 10^{11}}{580500 \cdot \left(52{,}76 \cdot 10^3\right)^2} = 12{,}1\ \mathrm{MPa}$$

Relativt slankhetstal:

$$\lambda_{\mathrm{rel,y}} = \sqrt{\frac{f_{\mathrm{c,0,k}}}{\sigma_{\mathrm{cr,y}}}} = \sqrt{\frac{24{,}5}{12{,}1}} = 1{,}42$$

Faktor k:

$$k_{\mathrm{y}} = 0{,}5 \cdot \left[1 + \beta_{\mathrm{c}} \cdot \left(\lambda_{\mathrm{rel,y}} - 0{,}3\right) + \lambda_{\mathrm{rel,y}}^{\ 2}\right] = 0{,}5 \cdot \left[1 + 0{,}1 \cdot \left(1{,}42 - 0{,}3\right) + 1{,}42^2\right] = 1{,}57$$

Reduktionsfaktor vid knäckning:

$$k_{\mathrm{c,y}} = \frac{1}{k_{\mathrm{y}} + \sqrt{k_{\mathrm{y}}^{\ 2} - \lambda_{\mathrm{rel,y}}^{\ 2}}} = \frac{1}{1{,}57 + \sqrt{1{,}57^2 - 1{,}42^2}} = 0{,}45$$

Kontrollera villkoret för knäckning kring y-axeln och böjning kring y-axeln (*SS-EN 1995-1-1, ekvation 6.23*):

$$\frac{\sigma_{\mathrm{c,0,d}}}{k_{\mathrm{c,y}} \cdot f_{\mathrm{c,0,d}}} + \frac{\sigma_{\mathrm{m,y,d}} \cdot k_l}{f_{\mathrm{m,d}}} = \frac{3{,}55}{0{,}45 \cdot 15{,}68} + \frac{1{,}5 \cdot 1{,}01}{19{,}2} = 0{,}58 \quad < 1 \quad \textbf{OK}$$

Beräkning med hjälp av Finita elementmetoden
Ovanstående handräkning kontrolleras med hjälp av numerisk analys.

Kritisk normalkraft:

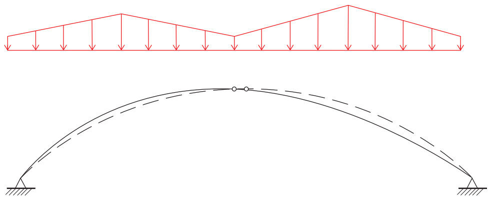
$$N_{\mathrm{cr}} = 8743\ \mathrm{kN}$$

Approximativt värde av knäcklängd:

$$l_{\mathrm{cr,y}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E_{0,05} \cdot I_{\mathrm{y}}}{N_{\mathrm{cr}}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E_{0,05} \cdot 1{,}83 \cdot 10^{11}}{8743 \cdot 10^3}} = 47283{,}26\ \mathrm{mm}$$

Det värde för den effektiva längden som fås med hjälp av Finita elementmetoden är mindre än det värde som fås med handberäkning. Utför därför stabilitetskontroll enbart med handberäkningsvärdet som ger resultat på den säkra sidan.

Kombination 3, osymmetrisk snölast:



$$\sigma_{\mathrm{c,0,d}} = \frac{N_{\mathrm{Ed}}}{A} = \frac{1684 \cdot 10^3}{580500} = 2{,}9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\mathrm{m,y,d}} = \frac{M_{\mathrm{Ed}}}{I_{\mathrm{y}}} \cdot \frac{h}{2} = \frac{2065 \cdot 10^6}{1{,}83 \cdot 10^{11}} \cdot \frac{1620}{2} = 9{,}12 \text{ MPa}$$

Handberäkning
Stabilitetskontroll kring y-axeln (utknäckning i z-riktning)

Knäcklängd, *se Projektering av limträkonstruktioner, ekvation 11.23*:

$$l_{0,\mathrm{y}} = 1{,}25 \cdot \frac{l_{\mathrm{curve}}}{2} = 1{,}25 \cdot \frac{84{,}42}{2} = 52{,}76 \text{ m}$$

Kritisk Eulerspänning:

$$\sigma_{\mathrm{cr,y}} = \frac{\pi^2 \cdot E_{0,05} \cdot I_{\mathrm{y}}}{A \cdot l_{0,\mathrm{y}}^{\;2}} = \frac{\pi^2 \cdot 10800 \cdot 1{,}83 \cdot 10^{11}}{580500 \cdot \left(52{,}76 \cdot 10^3\right)^2} = 12{,}1 \text{ MPa}$$

Relativt slankhetstal:

$$\lambda_{\mathrm{rel,y}} = \sqrt{\frac{f_{\mathrm{c,0,k}}}{\sigma_{\mathrm{cr,y}}}} = \sqrt{\frac{24{,}5}{12{,}1}} = 1{,}42$$

Faktor *k*:

$$k_{\mathrm{y}} = 0{,}5 \cdot \left[1 + \beta_{\mathrm{c}} \cdot \left(\lambda_{\mathrm{rel,y}} - 0{,}3\right) + \lambda_{\mathrm{rel,y}}^{\;2}\right] = 0{,}5 \cdot \left[1 + 0{,}1 \cdot \left(1{,}42 - 0{,}3\right) + 1{,}42^2\right] = 1{,}57$$

Reduktionsfaktor vid knäckning:

$$k_{\mathrm{c,y}} = \frac{1}{k_{\mathrm{y}} + \sqrt{k_{\mathrm{y}}^{\;2} - \lambda_{\mathrm{rel,y}}^{\;2}}} = \frac{1}{1{,}57 + \sqrt{1{,}57^2 - 1{,}42^2}} = 0{,}45$$

Kontrollera villkoret för knäckning kring y-axeln och böjning kring y-axeln (*SS-EN 1995-1-1, ekvation 6.23*):

$$\frac{\sigma_{\mathrm{c,0,d}}}{k_{\mathrm{c,y}} \cdot f_{\mathrm{c,0,d}}} + \frac{\sigma_{\mathrm{m,y,d}} \cdot k_l}{f_{\mathrm{m,d}}} = \frac{2{,}9}{0{,}45 \cdot 15{,}68} + \frac{9{,}12 \cdot 1{,}01}{19{,}2} = 0{,}89 \quad < 1 \quad \textbf{OK}$$

Beräkning med hjälp av Finita elementmetoden
Ovanstående handräkning kontrolleras med hjälp av numerisk analys.

Kritisk normalkraft:

$$N_{\mathrm{cr}} = 8433{,}02$$

Approximativt värde av knäcklängd:

$$l_{\mathrm{cr,y}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E_{0,05} \cdot I_{\mathrm{y}}}{N_{\mathrm{cr}}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 10800 \cdot 1{,}83 \cdot 10^{11}}{8433{,}02 \cdot 10^3}} = 48144{,}44 \text{ mm}$$

Det värde för knäcklängden som fås med hjälp av Finita elementmetoden är mindre än det värde som fås med handberäkning. Utför därför stabilitetskontroll enbart med handberäkningsvärdet som ger resultat på den säkra sidan.